Functietheorie 21-8-97

Tentamenopgave

I

1. Formuleer het maximumprincipe.

2. Bepaal het maximum van de functie $|\sin(z)|$ op het vierkant $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ en bepaal een punt van het vierkant waar het maximum wordt bereikt. Aanwijzing: spaar tijd door gebruik te maken van het feit dat de functie sinus oneven is.

II

1. Formuleer de stelling van Cauchy en de formule van Cauchy.

2. Bereken de integralen

$$\int_\Gamma \frac{\sin(z)}{z+\frac{1}{2}} dz, \qquad \Gamma = \{z : |z| = 5\}$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+z+1}, \qquad \Gamma = \{z : |z| = \tfrac{1}{2}\}$$

III

1. Formuleer de residu-stelling.

2. Bereken de integraal $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin(z)}{1+z^2} dz$

i. met $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$,

ii. met $\Gamma = \{z : |z| = \frac{1}{2}\}$.

3. Bereken de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx$

IV

1. Formuleer het principe van eenduidige analytische voortzetting.

2. Zij f een holomorfe (complex analytische) functie op een strip $\Omega = \{z : |\mathrm{Im}\,(z)| < R\}$. Zij $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

a. Toon aan dat F holomorf is op Ω.

b. Stel $f(x) \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $F(z) = f(z)$ voor all $z \in \Omega$.